

الفصل الدراسى الأول ٢٠٢٠

- قانون الجيب
- قانون جيب التمام
- حل المثلث

(١) إذا علم قياسا زاويتين وطول ضلع

(٢) إذا علم طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة

(٣) إذا علم أطوال أضلاع الثلاثة

(٤) طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لإحداهما (الحالة المبهمة)

مراجعة ما سبق دراسته

إشارات الدوال المثلثية

كما هو مبين في الشكل و يجب قبل تحديد إشارة الدالة المثلثية تحديد الربع الذى تقع فيه الزاوية

الربع	الزاوية هـ	إشارة جا ، قتا	إشارة جتا ، قا	إشارة ظا ، ظتا
الربع الأول	] ٠ ، ٩٠° [	+	+	+
الربع الثانى	] ٩٠° ، ١٨٠° [	+	–	–
الربع الثالث	] ١٨٠° ، ٢٧٠° [	–	–	+
الربع الرابع	] ٢٧٠° ، ٣٦٠° [	–	+	–

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

الدالة	٣٠°	٤٥°	٦٠°	٩٠°	١٨٠°	٢٧٠°	٣٦٠° ، صفر°
حا	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	١	صفر	– ١	صفر
حتا	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	صفر	– ١	صفر	١
ظا	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	١	$\sqrt{3}$	غير معرف	صفر	غير معرف	صفر

بعض خواص الدوال المثلثية :-

[١] العلاقة بين النسب المثلثية للزاويتين المتتامتين [هـ ، ٩٠° - هـ]

(١) حا هـ = حتا (٩٠° – هـ) ،،،، قتاهـ = قا(٩٠° – هـ)

(٢) حتا هـ = حا(٩٠° – هـ) ،،،، قا هـ = قتا (٩٠° – هـ)

(٣) ظا هـ = ظتا(٩٠° – هـ) ،،،، ظتا هـ = ظا (٩٠° – هـ)

ملاحظة : إذا كان حا س = حتا ص

∴ س + ص = ٩٠° حيث س ، ص قياسا زاويتين حادتين موجبتين

[٢] العلاقة بين النسب المثلثية للزاويتين المتكاملتين [هـ ، ١٨٠° - هـ]

الزاوية (١٨٠° ـ هـ) تقع فى الربع الثانى (جا ، قتا) فقط موجبة

(١) جا (١٨٠° ـ هـ) = جا هـ

(٢) جتا (١٨٠° ـ هـ) = ـ جتا هـ

(٣) ظا (١٨٠° ـ هـ) = ـ ظا هـ

[٣] العلاقة بين النسب المثلثية للزاويتين [هـ ، ١٨٠° + هـ]

الزاوية (١٨٠ + هـ) تقع فى الربع الثالث (ظا ، ظتا) فقط موجبة

(١) جا (١٨٠° + هـ) = ـ جا هـ

(٢) جتا (١٨٠° + هـ) = ـ جتا هـ

(٣) ظا (١٨٠° + هـ) = ظا هـ

[٤] العلاقة بين النسب المثلثية للزاويتين [هـ ، ٣٦٠° - هـ] أ، [هـ ، ـ هـ]

الزاوية (٣٦٠° ـ هـ) تقع فى الربع الرابع (جتا ، قا) فقط موجبة

(١) جا (٣٦٠° ـ هـ)= ـ جا هـ

(٢) جتا (٣٦٠° ـ هـ) = جتا هـ

(٣) ظا (٣٦٠° ـ هـ) = ـ ظا هـ

فمثلاً (١) جا ١٢٠° فى الربع الثانى = جا (١٨٠ ـ ٦٠) = جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

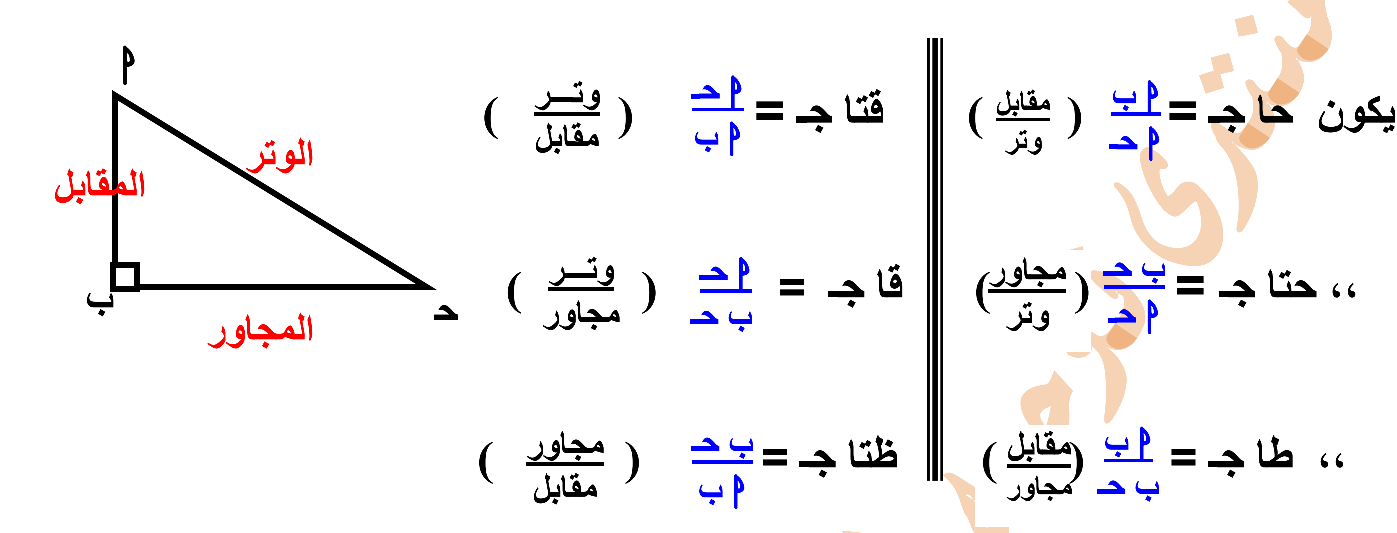
(٢) جتا ٢١٠° فى الربع الثالث = جتا (١٨٠ + ٣٠) = ـ جتا ٣٠° = ـ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(٣) ظا ١٥٠° فى الربع الثانى = ظا (١٨٠ ـ ٣٠) = ـ ظا ٣٠° = ـ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(٤) قا ٣٠٠° فى الربع الرابع = قا (٣٦٠ ـ ٦٠) = قا ٦٠° = ٢

(٥) قتا (ـ ٦٠°) فى الربع الرابع = ـ قتا ٦٠° = $\frac{2}{\sqrt{3}}$

الدوال المثلثية للزوايا الحادة المرسومة فى Δ أ ب جـ قائم فى ب



يكون حا جـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ ($\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$) | قتا جـ = $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}}$ ($\frac{\text{وتر}}{\text{مقابل}}$)

،، حتا جـ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$ ($\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$) | قا جـ = $\frac{\text{أ جـ}}{\text{ب جـ}}$ ($\frac{\text{وتر}}{\text{مجاور}}$)

،، طا جـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$ ($\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$) | ظتا جـ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$ ($\frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}}$)

معنى حل المثلث : المثلث يتكون من ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا المقصود بحل المثلث هو معرفة أطوال أضلاعه وقياس زواياه ويستلزم معرفة قياس ثلاث عناصرمن عناصره الست بشرط أن يكون أحد هذه العناصر الثلاث هو طول أحد الأضلاع

***العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية :**

(١) حتا²هـ + حا²هـ = ١ ، ١ + طا²هـ = قا²هـ ، ١ + ظتا²هـ = قتا²هـ

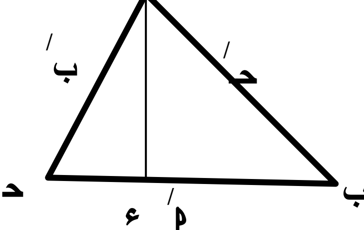
(٢) حا هـ قتا هـ = ١ ، حتا هـ قا هـ = ١ ، طا هـ ظتا هـ = ١

(٣) طا هـ = $\frac{\text{حا هـ}}{\text{حتا هـ}}$ ، ظتا هـ = $\frac{\text{حتا هـ}}{\text{حا هـ}}$

قانون الجيب (قاعدة الجيب)

فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها

أى أنه : في أي مثلث أ ب جـ يكون :



$$\frac{أ/}{جا أ} = \frac{ب/}{جا ب} = \frac{جـ/}{جا حـ}$$

حيث الرموز : أ ، ب ، حـ تعبر عن قياسات زوايا المثلث أ ب حـ

، أ/ ، ب/ ، حـ/ تعبر عن أطوال الأضلاع ب حـ ، أ حـ ، أ ب على الترتيب

البرهان :

مساحة ∆ أ ب حـ = ½ × ب حـ × أ ء ،

∵ أ ء = حـ/ جا ب (من مساحة ∆أ ب ء)

∴ مساحة ∆أ ب حـ = ½ × ب/ جـ/ حا أ = ½ × أ/ جـ/ حاب = ½ × أ/ ب/ حا جـ

بالضرب × ٢ ثم القسمة على أ/ ب/ جـ/ ينتج المطلوب

$$\frac{أ/}{جا أ} = \frac{ب/}{حا ب} = \frac{جـ/}{حا حـ}$$

ملاحظات :

محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه = أ/ + ب/ + جـ/

مساحة المثلث = ½ × طول القاعدة × الارتفاع

مساحة المثلث = ½ × حاصل ضرب طولي أي ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

مساحة المثلث = ½ × أ/ ب/ جا جـ = ½ × ب/ جـ/ جا أ = ½ × أ/ جـ/ جاب

محيط الدائرة = ٢ ط نق & مساحة الدائرة = ط نق²

أكبر ضلع في المثلث يقابل أكبر زاوية في المثلث

أصغر ضلع في المثلث يقابل أصغر زاوية في المثلث

مثـال ١ : في المثلث ٩ ب جـ إذا كان ٩/ = ١٠سم ، ق(∠ب) = ٤٥° ، ق(∠جـ) = ٦٠°

فأوجد قيمة كل من ب/ ، جـ/ ومساحة المثلث ٩ ب جـ لأقرب رقم عشري

الحـــــــــــــل

∵ ق(∠٩) = ١٨٠° − (٤٥ + ٦٠) = ٧٥°

$$\because \frac{\text{٩/}}{\text{جا ٩}} = \frac{\text{ب/}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{جـ/}}{\text{حا حـ}} \quad \therefore \frac{\text{١٠}}{\text{جا ٧٥}} = \frac{\text{ب/}}{\text{حا ٤٥}} = \frac{\text{جـ/}}{\text{حا ٦٠}}$$

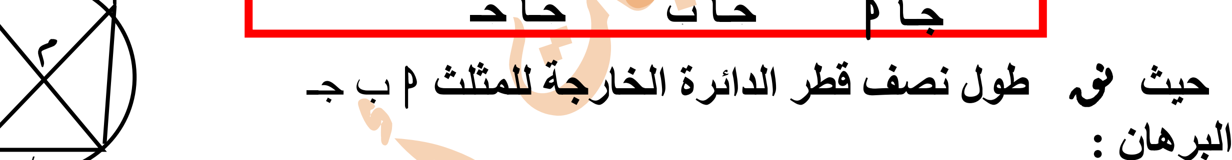
$$\therefore \text{ب/} = \frac{\text{١٠} \times \text{حا ٤٥}}{\text{جا ٧٥}} = \text{٧,٤ سم}$$

$$\text{، جـ/} = \frac{\text{١٠} \times \text{حا ٦٠}}{\text{جا ٧٥}} = \text{٩ سم}$$

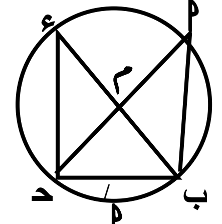
، مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ا/ب/ جا جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ٧,٤ × جا ٦٠° = ٣٢ سم^{٢}

تمر ين مشهور

في أي مثلث ٩ ب جـ يكون :



$$\therefore \frac{\text{٩/}}{\text{جا ٩}} = \frac{\text{ب/}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{جـ/}}{\text{حا حـ}} = \text{٢ نق}$$



حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث ٩ ب جـ

البرهان :

نرسم الدائرة م المارة برؤوس Δ ٩ ب حـ

ثم نرسم القطر $\overline{\text{ب ء}}$ ، الوتر $\overline{\text{حـ ء}}$

فيكون : ق(∠ ب حـ ء) = ٩٠° " محيطية مرسومة فى نصف دائرة "

، ق(∠٩) = ق(∠ء) " محيطيتان تحصران نفس القوس "

في Δ ء ب حـ : $\text{حا ء} = \frac{\text{٩/}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{٩/}}{\text{٢ نق}} \quad \therefore \text{حا ٩} = \frac{\text{٩/}}{\text{٢ نق}}$

$$\therefore \frac{\text{٩/}}{\text{حا ٩}} = \text{٢ نق} \qquad \therefore \frac{\text{٩/}}{\text{حا ٩}} = \frac{\text{ب/}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حـ/}}{\text{حا حـ}} = \text{٢ نق}$$

نتائج هامة

٩/ = ٢ نق جا ٩ & ب/ = ٢ نق جاب & جـ/ = ٢ نق جا جـ

$\text{جا ا} = \frac{\text{٩/}}{\text{٢ نق}}$ & $\text{جا ب} = \frac{\text{ب/}}{\text{٢ نق}}$ & $\text{جا جـ} = \frac{\text{حـ/}}{\text{٢ نق}}$

ملاحظة هامة : تستخدم كل من قاعدة الجيب والتمرين المشهور إذا علم :

- قياسا زاويتين وطول ضلع
- قياسا زاويتين وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث
- قياسا زاويتين وطول محيط المثلث

مثـــ٢ ــال: في المثلث ا ب جـ إذا كان ا/ = ١٠ سم ، ق(∠ب) = ٤٥° ، ق(∠جـ) = ٦٠°
فأوجد محيط الدائرة الخارجة للمثلث ا ب جـ

الحـــــــــل

∵ ق(∠ا) = ١٨٠ − (٤٥° + ٦٠°) = ٧٥°

∴ $\frac{ا/}{جا ا} = \frac{ب/}{جا ب} = \frac{جـ/}{جا جـ} = ٢ نق$

∴ $\frac{١٠}{جا ٧٥} = \frac{ب/}{جا ٤٥} = \frac{جـ/}{جا ٦٠} = ٢ نق$

∴ ٢ نق = $\frac{١٠}{جا ٧٥}$ = ١٠,٣ سم ∴ نق = ٥,٢ سم

∴ محيط الدائرة = ٢ ط نق = ٢ × ط × ٥,٢ = ٣٢,٥ سم

مثـ٣ــال: إذا كان مقاييس زوايا مثلث تتناسب مع ١ : ٢ : ٣ فأثبت أن أطوال الأضلاع المقابلة لهذه الزوايا تتناسب مع ١ : $\sqrt{٣}$: ٢

الحـــــــــل

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

∴ ق(∠ا) = ١٨٠ × $\frac{١}{٦}$ = ٣٠°

∴ ق(∠ب) = ١٨٠ × $\frac{٢}{٦}$ = ٦٠°

∴ ق(∠جـ) = ١٨٠ × $\frac{٣}{٦}$ = ٩٠°

∵ $\frac{ا/}{جا ا} = \frac{ب/}{جا ب} = \frac{جـ/}{جا جـ}$

∴ ا/ : ب/ : جـ/ = جا ا : جا ب : جا جـ = جا ٣٠° : جا ٦٠° : جا ٩٠°

= $\frac{١}{٢}$: $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$: ١ = ١ : $\sqrt{٣}$: ٢

مثـ٤ ـال: ل م ن مثلث فيه كان ، ق(∠ل) = ٥٢َ ٣٨ْ ، ق(∠ن) = ١٧َ ٤٤ْ

مَ = ٣٥٢,٧ فأوجد م ن ،، ل م

الحـــــــل

∵ ق(∠م) = ١٨٠ْ − (٥٢َ ٣٨ْ + ١٧َ ٤٤ْ) = ٥١َ ٩٦ْ

∴ مَ / جا م = لَ / جا ل = نَ / جا ن

∴ ٣٥٢,٧ / جا ٥١َ ٩٦ْ = لَ / جا ٥٢َ ٣٨ْ = نَ / جا ١٧َ ٤٤ْ

∴ م ن = لَ = (٣٥٢,٧ × جا ٥٢َ ٣٨ْ) / (جا ٥١َ ٩٦ْ) = ٢٢٢,٩

∴ ل م = نَ = (٣٥٢,٧ × جا ١٧َ ٤٤ْ) / (جا ٥١َ ٩٦ْ) = ٢٤٨

مثـ٥ ـال: إذا رمزنا لمساحة سطح المثلث أ ب جـ بالرمز Δ فأثبت أن

Δ = أَ بَ جـَ / ٤ نق = ٢ نق² جا أ جا ب جا جـ حيث : نق طول نصف قطر الدائرة

الحـــــــل

∵ Δ = ½ بَ جـَ جا أ   ∵ أَ / جا أ = ٢ نق   ∴ جا أ = أَ / ٢ نق

∴ Δ = ½ بَ جـَ × أَ / ٢ نق = أَ بَ جـَ / ٤ نق   [١]

∵ بَ / جا ب = جـَ / جا جـ = ٢ نق   ∴ بَ = ٢ نق جا ب ، جـَ = ٢ نق جا جـ

∴ Δ = ½ × ٢ نق جا ب × ٢ نق جا جـ × جا أ = ٢ نق² جا ب جا جـ جا أ

مثـ٦ ـال: أ ب حـ مثلث فيه جا أ : جا ب : جا جـ = ٩ : ٢ : ٤

أوجد أطوال أضلاعه إذا علم أن محيطه = ٤٥ سم

الحـــــــل

∵ أَ / جا أ = بَ / جا ب = جـَ / جا جـ = م

∴ $\frac{أ'}{٩} = \frac{ب'}{٢} = \frac{جـ'}{٤} =$ م   ∴ أ' = ٩ م ، ب' = ٢ م ، جـ' = ٤ م

∴ $\frac{أ'}{٩} = \frac{ب'}{٢} = \frac{جـ'}{٤} = \frac{أ' + ب' + جـ'}{٩ + ٢ + ٤} =$ م ، حيث $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالي}}$ = أحدى النسب

∴ $\frac{أ'}{٩} = \frac{ب'}{٢} = \frac{جـ'}{٤} = \frac{٤٥}{١٥} = ٣$

∴ أ' = ٩ × ٣ = ٢٧ سم

ب' = ٢ × ٣ = ٦ سم

جـ' = ٤ × ٣ = ١٢ سم

تمـــــــــارين

١ – ل م ن مثلث فيه ل' = ٢٤ سم ، ق(∠ل) = ٣٧° ، ق(∠م) = ١٠٠° أوجد لأقرب رقم عشري واحد كل من ن' ، وطول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث

٢ – أ ب جـ مثلث فيه أ' = ٢٠ سم ، ق(∠ب) = ٣٠° ، ق(∠جـ) = ٨٠° أوجد مساحة المثلث أ ب جـ

٣ – Δ أ ب حـ فيه ق(∠أ) = ٦٠° ؛ ق(∠ب) = ٤٠° طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٢٠ سم أوجد مساحة سطح المثلث لأقرب سم²

٤ – Δ أ ب حـ فيه أ' = ٦سم ؛ ق(∠ب) = ٤٠° ؛ ق(∠حـ) = ٧٥° أوجد طول كلا من ب' ؛ أ ب قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ لأقرب رقم عشري

٥ – أ ب حـ فيه أ' = ١٠سم ؛ ق(∠ب) = ٥٥° ؛ ق(∠حـ) = ٤٠° أوجد طول كلا من حـ' ؛ مساحة (Δ أ ب حـ) ؛ محيط الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ لأقرب رقم عشري

٦ – Δ أ ب حـ فيه أ' = ٦سم ؛ ق(∠ب) = ٤٦° ١٢' ؛ ق(∠حـ) = ٧٤° ١٨' أوجد طول ب لأقرب رقمين عشريين ؛ مساحة الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ لأقرب سم²

٧ – Δ س ص ع فيه ص' = ١٠سم ؛ ق(∠ص) = ١٠٠° ؛ ق(∠ع) = ٣٢° أوجد كلا من مساحة (Δ س ص ع) لأقرب سم² ؛ محيط Δ س ص ع لأقرب سم

٨ – Δ أ ب حـ فيه حـ' = ١٩سم ؛ ق(∠أ) = ١١٢° ؛ ق(∠ب) = ٣٣° أوجد طول كلا من ب

لأقرب سم ؛ نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث لأقرب رقمين عشريين

٩ ـ Δ ٩ ب حـ فيه ق(∠٩) = ٦٠° ؛ ق (∠ب) = ٤٠° طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٢٠ سم أوجد مساحة سطح المثلث لأقرب سم٢

١٠ ـ Δ٩ ب حـ فيه ٩َ = ١٢ سم ؛ ٩ حـ = ١٠سم ؛ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٧سم أوجد طول حـَ لأقرب سم حيث Δ ٩ ب حـ حاد الزوايا

١١ ـ Δ ٩ ب حـ فيه حا حـ = ٢, ٠ ؛ حـَ = ١٤سم أوجد مساحة الدائرة المارة برؤوسه

١٢ ـ Δ ٩ ب حـ فيه ٩َ = ٥سم ؛ ق (∠ب) = ١٢٠° ؛ مساحة (Δ٩ ب حـ) = ١٠√٣ سم٢ أوجد حـَ

١٣ ـ دائرة محيطها ٤٤سم تمر برؤوس Δ ٩ ب حـ الذي فيه ق (∠٩) = ٦٠° أوجد ٩َ

١٤ ـ دائرة مساحة سطحها ١٥٤سم٢ تمر برؤوس Δ ٩ ب حـ الذي فيه ٩ ب = ب حـ ؛ ق (∠ب) = ٧٠° أوجد ٩َ

١٥ ـ دائرة طول نصف قطرها ١٠سم تمر برؤوس Δ ٩ ب حـ الذي فيه ق (∠٩) = ٢٧° ؛ ق (∠حـ) = ٥٢° أوجد محيط Δ٩ ب حـ

١٦ ـ Δ ٩ ب حـ فيه ق (∠٩) : ق (∠ب) : ق (∠حـ) = ١ : ٣ : ٥ فإذا كان ٩َ = ١٨,٣ سم أوجد محيط Δ ٩ ب حـ لأقرب سم

١٧ ـ Δ س ص ع فيه ق (∠س) : ق (∠ص) : ق (∠ع) = ١ : ٢ : ٣ إثبت أن : سَ٢ : صَ٢ : عَ٢ = ١ : ٣ : ٤

١٨ ـ Δ ٩ ب حـ فيه ٩َ = ٨ سم إثبت أن : ـ مساحة (Δ ٩ ب حـ) = $\frac{٢ بَ حـَ}{نق}$ حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن Δ٩ ب حـ

١٩ ـ Δ س ص ع قائم الزاوية في ص ، ق (∠ ع) = ٣٠° إثبت أن مساحته = √٣ نق

٢٠ ـ في Δ ٩ ب حـ إثبت أن : ـ مساحة (Δ ٩ ب حـ) = ٢ نق٢ حا ٩ حاب حا حـ

٢١ - Δ ٯ ب حـ محيطه ١٦سم ؛ ق (∠ ٯ) = ٥٠° ؛ ق (∠ ب) =٥٦° أوجد ب/ ، حـ/

٢٢ - Δ ٯ ب حـ محيطه ١٢ سم ؛ ق (∠ ٯ) =٤٧° ؛ ق (∠ ب) = ٥٣° أوجد ب/

٢٣ - Δ ٯ ب حـ فيه ب حـ = ٥٥سم ، ق (∠ حـ) =٢٧° ، ق (∠ ٯ) = ٢٩° أوجد طول مسقط ٯ ب علي ب حـ ؛ طول العمود المرسوم من ٯ علي ب حـ لأقرب سم

٢٤ - Δ ٯ ب حـ فيه ٯ/ = ١٠سم ، ق (∠ ب) =٥٠° ، ق (∠ حـ) =٦٠° أوجد طول كلا من نصفي قطري الدائرتين الخارجة والداخلة للمثلث ٯ ب حـ

٢٥ - ٯ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه ٯ ب = ١٨سم ؛ ق (∠ حـ ٯ ب) = ٣٦° ، ق (∠ ء ب ٯ) = ٤٤° أوجد طول قطره ٯ حـ ؛ مساحة سطح متوازي الأضلاع ٯ ب حـ ء لأقرب وحدة

٢٦ - ٯ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه ٯ حـ = ٢٠ سم ؛ ق (∠ ب ٯ م) =٣٨° حيث م نقطة تقاطع قطريه؛ ق (∠ ٯ ب م) =٦٢ أوجد طول كلا من ٯ ب ؛ ب ء

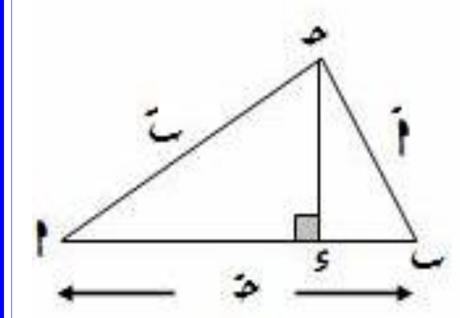
٢٧ - ٯ ب حـ ء شبه منحرف فيه ٯ ء // ب حـ ؛ ٯ ء = ١٥ سم ؛ ق (∠ ء) =١٠٠° ؛ ق (∠ ب) = ٦٥° ؛ ق (∠ ٯ حـ ب) =٣٢° أوجد طول كلا من ٯ جـ ، ب حـ لأقرب سم ، مساحة سطح شبه المنحرف ٯ ب حـ ء لأقرب سم؟

٢٨ - ٯ ب حـ ء شكل رباعي دائري حيث ٯ ب قطر الدائرة المارة برؤوسه وطول نصف قطرها ٧سم ، ق (∠ حـ ٯ ب) =٢٠° ، ق (∠ ٯ ب ء) =٤٠° أوجد مساحة سطح الشكل ٯ ب حـ ء

٢٩ - ٯ ب حـ ء هـ مخمس منتظم طول ضلعه ١٨سم أوجد طول قطره لأقرب سم

٣٠ - ٯ ب جـ متساوي الساقين فيه ق (∠ ٯ) = ١٢٠° ،وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه ٢٠ سم أوجد ب/ ، ثم استنتج مساحة المثلث لأقرب سم؟

قانون جيب التمام (قاعدة جيب التمام)



في Δ أ ب حـ يكون :

أ/٢ = ب/٢ + حـ/٢ − ٢ ب/ حـ/ حتا أ

ب/٢ = أ/٢ + حـ/٢ − ٢ أ/ حـ/ حتا ب

حـ/٢ = أ/٢ + ب/٢ − ٢ أ/ ب/ حتا حـ

البرهـــان

∵ Δ حـ ء ب قائم الزاوية فى ء

∴ أ/٢ = (ب حـ)٢ = (ء حـ)٢ + (ء ب)٢ ، ∵ ء ب = ب أ − ء أ

∴ أ/٢ = (حـ ب)٢ = (ء حـ)٢ + (ب أ − ء أ)٢

= (ء حـ)٢ + (ب أ)٢ + (ء أ)٢ − ٢ ب أ × ء أ

، ∵ Δ حـ ء أ قائم الزاوية فى ء ∴ (حـ أ)٢ = (ء حـ)٢ + (ء أ)٢

، حتا أ = ء أ ÷ حـ أ ∴ ء أ = حـ أ حتا أ

∴ أ/٢ = (حـ أ)٢ + (ب أ)٢ − ٢ حـ أ × ب أ حتا أ

∴ أ/٢ = ب/٢ + حـ/٢ − ٢ ب/ حـ/ حتا أ

إذا علم طولا ضلعين فى مثلث وقياس الزاوية المحصورة بينهما		إذا علمت أطوال أضلاع مثلث أو النسبة بينها
• أ/٢ = ب/٢ + حـ/٢ − ٢ ب/ حـ/ حتا أ	ومنها	حتا أ = (ب/٢ + حـ/٢ − أ/٢) ÷ (٢ ب/ حـ/)
• ب/٢ = أ/٢ + حـ/٢ − ٢ أ/ حـ/ حتا ب	ومنها	حتا ب = (أ/٢ + حـ/٢ − ب/٢) ÷ (٢ أ/ حـ/)
• حـ/٢ = أ/٢ + ب/٢ − ٢ أ/ ب/ حتا حـ	ومنها	حتا حـ = (أ/٢ + ب/٢ − حـ/٢) ÷ (٢ أ/ ب/)

ملاحظات :

- لإيجاد قياس إحدى زوايا مثلث يفضل إستخدام قانون جيب التمام لأنه يحدد نوع الزاوية فإذا كانت حتا أ موجبة كانت ∠ أ حادة
  أما إذا كانت حتا أ سالبة كانت ∠ أ منفرجة

- أكبر زوايا المثلث قياساً تقابل أكبر الأضلاع طولاً ، أصغرها قياساً تقابل أصغر الأضلاع طولاً
- إذا كان : أ/ : ب/ : حـ/ = ٣ : ٤ : ٥ نفرض أن: أ/ = ٣ ل ، ب/ = ٤ ل ، حـ/ = ٥ ل ثم نعوض فى قانون جيب التمام لإيجاد قياسات زوايا Δ أ ب حـ

مثــ١ــال : مثلث أ ب حـ فيه أ/ = ١٣سم ، ب/ = ١٥سم ، ق(∠ حـ) =٨٧° أوجد حـ/ لأقرب سم

الحـــــــل

حـ/٢ = أ/٢ + ب/٢ – ٢ أ/ ب/ حتا حـ

= (١٣)٢ + (١٥)٢ – ٢ × ١٣ × ١٥ × حتا ٨٧

= ٣٧٤ ∴ حـ/ = $\sqrt{٣٧٤}$ = ١٩ سم

مثــ٢ــال : أوجد قياس أكبر زاوية في المثلث أ ب جـ الذي فيه أ/ = ٣سم ، ب/ = ٥ سم ، جـ/ = ٧ سم

الحـــــــل

أكبر زاوية هى ∠ جـ لأنها تقابل أكبر الأضلاع طولا : جـ/ = ٧سم

حتا حـ = $\frac{أ/^٢ + ب/^٢ - حـ/^٢}{٢ أ/ ب/}$ = $\frac{٣^٢ + ٥^٢ - ٧^٢}{٢ \times ٣ \times ٥}$ = – $\frac{١}{٢}$

∴ ق(∠ جـ) = ١٢٠°

مثــ٣ــال : مثلث أ ب حـ فيه $\frac{١}{٢}$ جا أ = $\frac{١}{٣}$ جا ب = $\frac{١}{٤}$ جا جـ أحسب ق(∠جـ) ؟

الحـــــــل

∵ $\frac{جا أ}{٢}$ = $\frac{حا ب}{٣}$ = $\frac{حا جـ}{٤}$ ، ∵ $\frac{أ/}{جا أ}$ = $\frac{ب/}{حا ب}$ = $\frac{جـ/}{حا جـ}$

∴ $\frac{أ/}{٢}$ = $\frac{ب/}{٣}$ = $\frac{جـ/}{٤}$ = م ∴ أ/ = ٢ م ، ب/ = ٣ م ، جـ/ = ٤ م

∵ حتا حـ = $\frac{أ/^٢ + ب/^٢ - حـ/^٢}{٢ أ/ ب/}$ = $\frac{٤م^٢ + ٩ م^٢ - ١٦ م^٢}{٢ \times ٢م \times ٣م}$ = $\frac{-٣ م^٢}{١٢ م^٢}$

∴ جتا جـ = $\frac{-١}{٤}$ (سالبة) ∴ الزاوية جـ منفرجة وبإستخدام حاسبة الجيب

∴ ق(∠ جـ) = ١٠٤° ٢٨/

مثـــ٤ـال : إذا كان طولا ضلعين فى مثلث هما $\sqrt{3} + 1$ ، $\sqrt{3} - 1$ والزاوية بينهما قياسها $120°$ أوجد بدون الحاسبة طول الضلع الثالث

الحـــــــــل

بفرض أن : أ = $\sqrt{3} + 1$ ، ب = $\sqrt{3} - 1$ ، ق(∠ جـ) = $120°$

∵ جـ^2 = أ^2 + ب^2 − ٢ أ ب حتا جـ

$= (\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2 - 2 \times (\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) \times$ حتا $120°$

$= 4 + 2\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3} - 4 \times (-\frac{1}{2}) = 10$

∴ جـ^2 = ١٠ ∴ طول الضلع الثالث = جـ = $\sqrt{10}$

مثـــ٥ـال : مثلث أ ب جـ فيه أ = ٥سم ، مساحة سطحه = $10\sqrt{3}$ سم^2 ، ق(∠ ب) = $120°$ أوجد جـ ، ب لأقرب سم ثم أوجد ق(∠ أ)

الحـــــــــل

∵ مساحة سطح Δ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ أ جـ جا ب

$10\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 5 \times$ جـ × جا $120°$

∴ $10\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 5 \times$ جـ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ جـ = $10\sqrt{3} \div \frac{5\sqrt{3}}{4}$ = ٨ سم

∵ ب^2 = أ^2 + جـ^2 − ٢ أ جـ حتا ب

ب^2 = $(5)^2 + (8)^2 - 2 \times 5 \times 8 \times$ حتا $120°$

ب^2 = ١٢٩ ∴ ب = $\sqrt{129}$ = ١١,٣٦ سم

∵ ∠ ب منفرجة ∴ ∠ أ حادة

∵ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{جـ}{جا جـ}$ ∴ $\frac{5}{جا أ} = \frac{11,36}{جا 120°}$

∴ جا أ = $\frac{5 \times جا 120°}{11,36}$ بإستخدام الحاسبة ∴ ق(∠ أ) = $22° 24'$

مثـــ٦ــال : في المثلث ٩ ب جـ فيه ٩/ = ١٥سم ، ب/ = ٢٥ سم ، جـ/ = ٣٥ سم
أثبت أن جـ هى قياس أكبر زاوية فى المثلث وأنها تحقق العلاقة :
جتا حـ - ٥ $\sqrt{٣}$ جا جـ + ٨ = صفر

الحـــــــــل

أكبر زاوية هى ∠ جـ لأنها تقابل أكبر الأضلاع طولا : جـ/ = ٧سم

$$\text{جتا حـ} = \frac{٩'^2 + ب'^2 - حـ'^2}{٢ ٩' ب'} = \frac{(١٥)^2 + (٢٥)^2 - (٣٥)^2}{٢ \times ١٥ \times ٢٥} = -\frac{١}{٢}$$

∴ ق(∠ جـ) = ١٢٠°

∴ الطرف الأيمن = جتا ١٢٠° - ٥ $\sqrt{٣}$ جا ١٢٠° + ٨

$$= -\frac{١}{٢} - ٥\sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + ٨ = -٠,٥ - ٧,٥ + ٨ = \text{صفر}$$

تمـــــــــارين

١ - ∆ ٩ ب حـ فيه ٩/ = ١٣سم ، ب/ = ١٤سم ، حـ/ = ١٥سم أوجد ق (∠ ٩)

٢ - ∆ ٩ ب حـ فيه ٩/ = ١٧سم ، ب/ = ١٤سم ، حـ/ = ١٥سم أوجد قياس أصغر زواياه

٣ - ∆ ٩ ب حـ فيه ٩/ = ١٢ سم ، ب/ = ١٣سم ، حـ/ = ١٠سم أوجد ق (∠ ٩) ثم
أحسب طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه لأقرب سم

٤ - ∆ س ص ع فيه س/ = ١٥سم ، ص/ = ١٢ سم ، ق (∠ ع) = ٨٧° أوجد ع/ لأقرب سم

٥ - ∆ ٩ ب حـ فيه ٩/ = ١٠سم ، ب/ = ١٦سم ، ق (∠ حـ) = ٦٠° أوجد حـ/ لأقرب سم
ثم أحسب مساحة (∆ ٩ ب حـ) لأقرب سم^2

٦ - ∆ ٩ ب حـ فيه جتا ٩ = $\frac{٢}{٣}$ ، ب/ = ١٦سم ، حـ/ = ١٢ سم إثبت أنه متساوي الساقين

٧ - ∆ ٩ ب حـ فيه ٩/ : ب/ : حـ/ = ١: ٣ : ١ أوجد قياس أكبر زواياه

٨ - ∆ ٩ ب حـ فيه ٩/ = ٢ ب/ جتا حـ إثبت أن ∆ ٩ ب حـ متساوي الساقين

٩ - ∆ س ص ع فيه ص ع = ١٤سم ، ق (∠ ص) = ٦٠° ، مساحة (∆ س ص ع) = ٤٩ $\sqrt{٣}$ سم
أوجد محيط ∆ س ص ع لأقرب سم

١٠ - ∆ س ص ع فيه س/ = ٤سم ، ص/ = ٥سم ، ع/ = ٦سم أوجد طول العمود المرسوم من رأس
اكبر زاوية للمثلث علي الضلع المقابل لأقرب رقم عشري

١١- ∆ س ص ع أوجد قياس أكبر زواياه إذا علم أن أطوال ارتفاعاته هي ١٢ سم ، ١٥سم ، ٢٠ سم

١٢ – ∆ ٩ ب حـ فيه ب حـ = ٢٠ سم ، ق (∠ ب) = ٢٩° ، ق (∠ حـ) = ٣٧° ، ء منتصف ب حـ
أوجد طول كلا من ٩ ب ، ٩ ء لأقرب رقم عشري

١٣ – ∆ س ص ع فيه ٤حاس = ٣حاص = ٢ حا ع أوجد قياس أكبر زواياه

١٤ – ∆ س ص ع فيه ق(∠ ص) = ٦٠° ، س/ = ٢ ع/ أوجد ق (∠ ع) ، ق (∠ س)

١٥ – ∆ ٩ ب حـ فيه ب/٢ = (حـ/ - ٩/)٢ + حـ/ ٩/ أوجد ق (∠ ب)

١٦ – ٩ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه ٩ حـ = ١٦سم ، ب ء = ٢٠سم ، ق (∠ ٩ م ب) = ٥٤°
حيث م نقطة تقاطع القطرين أوجد طول ٩ ء لأقرب سم

١٧ – ٩ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه ٩ ب = ١٦سم ، ب ء = ٢٥ سم ، ب حـ = ١٨سم أوجد
طول ٩ حـ لأقرب رقم عشري ، ق (∠ ب ٩ حـ)

١٨ – ٩ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه ٩ ب = ٨ سم ، ب ء = ٩ سم ، ب حـ = ١١ سم أوجد
طول ٩ حـ لأقرب سم ، مساحة متوازي الأضلاع ٩ ب حـ ء لأقرب سم٢

١٩ – ٩ ب حـ ء شكل رباعي فيه ٩ ب = ١٨سم ، ب حـ = ١٠ سم ، ء حـ = ١٦ سم ،
ء ٩ = ١٨سم ، ٩ حـ = ٢٢ سم إثبت أن الشكل ٩ ب جـ ء رباعي دائري

٢٠ – ٩ ب حـ ء شكل رباعي فيه ٩ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٧ سم ، ء حـ = ٥ سم ، ء ب =٨ سم
، ٩ حـ = ٨ سم إثبت أن الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري

٢١ – ٩ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه ق ∠ (ب) = ١٢٠° ، محيطه = ١٦سم ، طول القطر الأكبر
= ٧ سم أوجد طول كلا من ٩ ب ، ب حـ لأقرب سم

٢٢ – ٩ ب حـ ء شكل رباعي فيه ٩ ء = ٨ سم ، ب ء = ١٠ سم ، ق (∠ ء ٩ ب) =
ق (∠ ء ب حـ) = ٩٠° ، ق (∠ ء حـ ب) = ٣٠° أوجد طول ٩ حـ لأقرب سم

٢٣ – ٩ ب حـ ء شكل رباعي فيه ٩ ء = ٨ سم ، ب ء = ١٠ سم ، ق (∠ ء ٩ ب) =
ق (∠ ء ب حـ) = ٦٥° ، ق (∠ ٩ ب ء) = ٥٠° أوجد ق (∠ ب حـ ء)

٢٤– ∆ س ص ع فيه ء منتصف س ص إثبت أن : (ع س)٢ + (ع ص)٢ = ٢ (ع ء)٢ + ٢ (س ء)٢

٢٥ – ٩ ب حـ ء متوازي أضلاع إثبت أن : (٩ حـ)٢ + (ب ء)٢ = ٢ (٩ ب)٢ + ٢ (ب حـ)٢

٢٦ – ٩ ب حـ فيه ء منتصف ب حـ ، حـ/ = ٥سم ، ب/ = ٦سم ، ٩ ء = ٤.٣سم أوجد ٩/ لأقرب سم

حـــل المثلث

معنى حل المثلث : المثلث يتكون من ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا

المقصود بحل المثلث هو معرفة أطوال أضلاعه وقياس زواياه ويستلزم معرفة قياس ثلاث عناصرمن عناصره الست بشرط أن يكون أحد هذه العناصر الثلاث هو طول أحد الأضلاع

الحالة الأولى : حل المثلث إذا علم فيه قياسا زاويتين وطول ضلع

يستخدم قانون الجيب فى حل المثلث متى علم قياسا زاويتين فيه وطول أحد أضلاعه

فمثلاً فى △ ٢ ب حـ إذا علم : ق (∠٢) ، ق(∠ب) ، ٢/

فيمكن إيجاد ق(∠حـ) حيث : ق(∠حـ) = ١٨٠° − [ق (∠٢) + ق(∠ب)]

ومن قانون الجيب $\frac{٢/}{حا ٢} = \frac{ب/}{حا ب} = \frac{حـ/}{حا حـ}$ لإيجاد كلا من : ب/ ، حـ/

حيث : ب/ = $\frac{٢/ \times حاب}{جا ٢}$ ،،،، جـ/ = $\frac{٢/ \times حاجـ}{جا ٢}$

مثـ ١ ــال: حل △ ٢ ب حـ الذى فيه ق (∠٢) = ٤٥° ، ق(∠ب) = ٦٠° ، ٢/ = ١٠سم

الحـــــــــــــــل

∵ ق (∠٢) = ١٨٠° − (٤٥° + ٦٠°) = ٧٥° (١)

∴ $\frac{٢/}{حا ٢} = \frac{ب/}{حا ب} = \frac{حـ/}{حا حـ}$ ∴ $\frac{١٠}{حا٧٥°} = \frac{ب/}{حا ٤٥°} = \frac{حـ/}{حا٦٠°}$

∴ ب/ = $\frac{١٠ \times حا ٤٥°}{حا ٧٥°}$ = ٧,٤ سم (٢)

، جـ/ = $\frac{١٠ \times حا ٦٠°}{جا ٧٥°}$ = ٩ سم (٣)

مثـ ٢ ــال: حل △ ٢ ب حـ الذى فيه ق (∠٢) = ٢٠/ ٤١° ، ق(∠ب) = ١٧/ ٥٩° ، ٢/ = ٥,٦١٤ سم

الحـــــــــــــــل

∵ ق (∠٢) = ١٨٠° − (٢٠/ ٤١° + ١٧/ ٥٩°) = ٢٣/ ٧٩° (١)

∵ $\frac{٢/}{حا ٢} = \frac{ب/}{حا ب} = \frac{حـ/}{حا حـ}$ ∴ $\frac{٥,٦٤١}{حا ٢٠ ٤١} = \frac{ب/}{حا ١٧ ٥٩} = \frac{حـ/}{حا ٢٣ ٧٩}$

∴ ب/ = $\frac{٥,٦٤١ \times جا ١٧ ^\prime ٥٩^\circ}{جا ٢٠ ^\prime ٤١^\circ}$ = ٧,٣١ سم (٢)

، جـ/ = $\frac{٥,٦٤١ \times جا ٢٣ ^\prime ٧٩^\circ}{جا ٢٠ ^\prime ٤١^\circ}$ = ٨,٣٥ سم (٣)

مثـــال٣: حل Δ ل م ن فيه ، ق(∠ل) = ٥٢ ′ ٣٨° ، ق(∠ن) =١٧ ′ ٤٤°
م/ = ٣٥٢,٧

الحـــــــــــل

∵ ق(∠م) = ١٨٠° − (٥٢ ′ ٣٨° + ١٧ ′ ٤٤°) =٥١ ′ ٩٦° (١)

∴ $\frac{م^\prime}{جا م} = \frac{ل^\prime}{جا ل} = \frac{ن^\prime}{جا ن}$

∴ $\frac{٣٥٢,٧}{جا ٥١ ^\prime ٩٦^\circ} = \frac{ل^\prime}{جا ٥٢ ^\prime ٣٨^\circ} = \frac{ن^\prime}{جا ١٧ ^\prime ٤٤^\circ}$

∴ ل/ = $\frac{٣٥٢,٧ \times جا ٥٢ ^\prime ٣٨^\circ}{جا ٥١ ^\prime ٩٦^\circ}$ = ٢٢٢,٩ (٢)

∴ ن/ = $\frac{٣٥٢,٧ \times جا ١٧ ^\prime ٤٤^\circ}{جا ٥١ ^\prime ٩٦^\circ}$ = ٢٤٨ (٣)

تمـــــــارين

١ – حل Δ ٱ ب حـ الذي فيه ٱ/ = ١٦سم ، ق (∠ب) = ٥٥° ، ق (∠حـ) = ٨٠°

٢ – حل Δ ٱ ب حـ الذي فيه ٱ/ = ١٠سم ، ق (∠ب) = ٦٢° ، ق (∠حـ) = ٤٨°

٣ – حل Δ ٱ ب حـ الذي فيه ب/ = ٢٣ سم ، حـ/ = ٣٧سم ، ق (∠ٱ) = ٦٠°

٤ – حل Δ ٱ ب حـ الذي فيه ٱ/ = ١٦سم ، ب/ = ٢٥ سم ، ق (∠حـ) = ٣٠ ′ ١٠٤°

٥ – حل Δ ٱ ب حـ الذي فيه ٱ ب = ٱ حـ ، ق(∠ٱ) = ٨٠° ، مساحة سطح الدائرة الخارجة عنه = ١٥٤سم٢

٦ – حل Δ ٱ ب حـ الذي فيه ٱ/ = ٤ سم ، ق (∠ٱ) = ٢ ق (∠ب) = ٦٠°
ثم أوجد مساحته

الحالة الثانية : حل المثلث إذا علم فيه طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما

ليكن معلوم فى Δ ٢ ب حـ طولا ٢/ ، ب/ ، ق(∠حـ)

لذلك نطبق قانون جيب التمام : حـ/٢ = ٢/٢ + ب/٢ − ٢ ٢/ ب/ حتا حـ

ومنه نوجد ق (∠٢) حيث : حتا ٢ = $\frac{ب/^2 + حـ/^2 - ٢/^2}{٢ ب/ حـ/}$

ثم نوجد ق(∠ب) حيث : ق(∠ب) = ١٨٠° − [ق (∠٢) + ق(∠حـ)]

مثـ ١ ـــال : حل Δ ٢ ب حـ الذى فيه ٢/ = ١٣سم ، ب/ = ١٥سم ، ق(∠جـ) = ٨٧°

الحـــــــــــل

حـ/٢ = ٢/٢ + ب/٢ − ٢ ٢/ ب/ حتا حـ

= (١٣)٢ + (١٥)٢ − ٢ × ١٣ × ١٥ × حتا ٨٧

∴ حـ/٢ = ٣٧٤ ∴ حـ/ = $\sqrt{٣٧٤}$ = ١٩ سم (١)

حتا ٢ = $\frac{ب/^2 + حـ/^2 - ٢/^2}{٢ ب/ حـ/}$ = $\frac{١٥^2 + ١٩^2 - ١٣^2}{٢ \times ١٥ \times ١٩}$ ≈ ٠,٧٣١٥

∴ ق (∠٢) = ٤٢ ٥٩/ ° (٢)

، ق(∠ب) = ١٨٠° − [٨٧° + ٤٢ ٥٩/ °] = ٥٠° (٣)

مثـ ٢ ـــال : حل Δ ٢ ب حـ الذى فيه ٢/ = ٨٠ ، ب/ = ٥٠ ، ق(∠جـ) = ٢/ ٦٠°

الحـــــــــــل

حـ/٢ = ٢/٢ + ب/٢ − ٢ ٢/ ب/ حتا حـ

= (٨٠)٢ + (٥٠)٢ − ٢ × ٨٠ × ٥٠ × حتا ٢/ ٦٠°

∴ حـ/٢ = ٤٩٦٤ ∴ حـ/ = $\sqrt{٤٩٦٤}$ = ٧٠,٤٥٥٧ (١)

وبتطبيق قانون الجيب $\frac{ب/}{جا ب}$ = $\frac{جـ/}{جا جـ}$ ∴ $\frac{٥٠}{جا ب}$ = $\frac{٧٠,٤٦}{جا ٢/ ٦٠°}$

∴ جا ب = $\frac{٥٠ \times جا ٢٠^\prime ٦٠^\circ}{٧٠,٤٦}$ ∴ ق(∠ ب) = ٥٦َ ٣٧ْ (٢)

∴ ق (∠ ﻫ) = ١٨٠ْ - [٥٦ ٣٧ْ + ٢ ٦٠ْ] = ٢َ ٨٢ْ (٣)

مثـ٣ ـال : حل Δ س ص ع الذى فيه سَ = ١٦، صَ = ٢٥ ، ق(∠ ع) = ٣٠َ ١٠٤ْ

الحـــــــــــل

عَ٢ = سَ٢ + صَ٢ – ٢ سَ صَ حتا ع

= (١٦)٢ + (٢٥)٢ – ٢ × ١٦ × ٢٥ × حتا ٣٠ ١٠٤ْ

∴ عَ٢ = ١٠٨١,٣٢ ∴ عَ = $\sqrt{١٠٨١,٣٢}$ = ٣٢,٨٨ (١)

حتا س = $\frac{صَ^٢ + عَ^٢ - سَ^٢}{٢ صَ عَ}$ = $\frac{٢٥^٢ + ٣٢,٩^٢ - ١٦}{٢ \times ٢٥ \times ٣٢,٩}$ ≈ ٠.٨٨٢٣

∴ ق (∠ س) = ٦َ ٢٨ْ

، ق(∠ص) = ١٨٠ْ – [٦َ ٢٨ْ + ٣٠َ ١٠٤ْ] = ٢٤َ ٤٧ْ

تمـــــــارين

١ – حل Δ ﻫ ب ﺣ الذي فيه ﻫَ = ٢٥,٣ سم ، ﺣَ = ١٤,٧ سم ، ق (∠ ب) = ١,٢ء

٢ – حل Δ ﻫ ب ﺣ الذي فيه ﻫ ب = ٤٨,٥ سم ، ب ﺣ = ٤٦ سم ، حتا ب = – ٠,٦

٣ – حل Δ ﻫ ب ﺣ الذي فيه ب ﺣ = ٣٦ سم ، ﻫ ب = ٣٠ سم ، ق (∠ ب) = ١٠َ ٧٨ْ

ثم أوجد الإرتفاع المرسوم من ب على $\overline{ﻫ ﺣ}$

٤ – حل Δ ﻫ ب ﺣ الذي فيه ﻫَ = ٢١ سم ، حتا ب = $\frac{٤}{٥}$ ، ظا ﺣ = $\frac{٧}{٢٤}$.

٥ – حل Δ ﻫ ب ﺣ الذي فيه ﻫَ = ١٣ سم ، ق (∠ ﻫ) = ٦٠ْ ومحيطه ٣٥ سم

٦ – حل Δ ﻫ ب ﺣ الذي فيه ﻫَ = ١٣ سم ، ق (∠ ﻫ) = ٢٤ْ ، طول قطر الدائرة المارة

بروؤسه يساوى ٨ سم

الحالة الثالثة : حل المثلث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة

فى ∆ ٲ ب حـ إذا علم : ٲ/ ، ب/ ، حـ/ نوجد

أولاً : نوجد ق (∠ ٲ) حيث : حتا ٲ = (ب/² + حـ/² − ٲ/²) / (٢ ب/ حـ/)

ثانياً : نوجد ق(∠ ب) حيث : حتا ب = (ٲ/² + حـ/² − ب/²) / (٢ ٲ/ حـ/)

ثالثاً : نوجد ق(∠ حـ) حيث : ق(∠ حـ) = ١٨٠° − [ق (∠ ٲ) + ق(∠ ب)]

مثـــ١ـــال : حل ∆ ٲ ب حـ الذى فيه ٲ/ = ٥ سم ، ب/ = ٧سم ، حـ/ = ١١ سم

الحـــــــــــل

حتا ٲ = (ب/² + حـ/² − ٲ/²) / (٢ ب/ حـ/) = (٧² + ١١² − ٥²) / (٢ × ٧ × ١١) ∴ ق (∠ ٲ) = ٤١ /١٩°

حتا ب = (ٲ/² + حـ/² − ب/²) / (٢ ٲ/ حـ/) = (٥² + ١١² − ٧²) / (٢ × ٥ × ١١) ∴ ق (∠ ب) = ٨ /٢٨°

ق(∠ حـ) = ١٨٠° − [٤١ /١٩° + ٨ /٢٨°] = ١١ /١٣٢°

مثـــ٢ـــال : حل ∆ ٲ ب حـ الذى فيه ٲ/ = ٨ سم ، ب/ = ٥سم ، حـ/ = ٧ سم

الحـــــــــــل

حتا ب = (حـ/² + ٲ/² − ب/²) / (٢ ٲ/ حـ/) = (٧² + ٨² − ٥²) / (٢ × ٧ × ٨) ∴ ق (∠ ب) = ١٣ /٣٨°

حتا جـ = (ٲ/² + حـ/² − ب/²) / (٢ ٲ/ حـ/) = (٨² + ٥² − ٧²) / (٢ × ٨ × ٥) ∴ ق (∠ جـ) = ٦٠°

ق(∠ حـ) = ١٨٠° − [١٣ /٣٨° + ٦٠°] = ٤٧ /٨١°

تمـــــــارين

١ – حل Δ ؟ ب حـ الذي فيه ؟/ = ٨ سم ، ب/ = ٥ سم ، حـ/ = ٧ سم

٢ – حل Δ ؟ ب حـ الذي فيه ؟/ = ٦ سم ، ب/ = ٩ سم ، حـ/ = ٥ سم

٣ – حل Δ ؟ ب حـ الذي فيه ؟ ب : ب حـ : ؟ حـ = ٤ : ٥ : ٧ ومحيطه ٤٨ سم

الحالة الرابعة : حل المثلث إذا علم فيه طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لإحداهما (الحالة المبهمة)

فى Δ ؟ ب حـ إذا علم ؟/ ، ب/ ، ق (∠ ؟) نوجد قيمة ع = ب/ جا؟ ونلاحظ

أولاً : إذا كانت ∠ ؟ حادة وكان				ثانياً: إذا كانت ∠ ؟ قائمة أو منفرجة وكان	
١	إذا كان: ؟/ < ع فإنه لا يمكن رسم مثلث	٢	إذا كان: ؟/ = ع فإنه يمكن رسم مثلث وحيد قائم الزاوية	١	إذا كان: ؟/ ≤ ب/ فإنه لا يمكن رسم مثلث
٣	إذا كان: ع < ؟/ < ب/ فإنه يمكن رسم مثلثان	٤	إذا كان: ؟/ ≥ ب/ فإنه يمكن رسم مثلث وحيد	٢	إذا كان: ؟/ > ب/ فإنه يمكن رسم مثلث وحيد

مثـــال : حل Δ ؟ ب حـ الذى فيه ؟/ = ٧ سم ، ب/ = ٤ سم ، ق(∠ ؟) = ١١٢°

الحـــــــل

∵ ∠ ؟ منفرجة ⟸ ∠ ب حادة ، ؟/ > ب/ ∴ يوجد للمثلث حل وحيد

وبتطبيق قانون الجيب $\frac{؟/}{جا ؟} = \frac{ب/}{جا ب} = \frac{جـ/}{جا جـ}$ ∴ $\frac{٧}{جا ١١٢°} = \frac{٤}{جا ب}$

∴ جا ب = $\frac{٤ \times جا ١١٢°}{٧}$ ∴ ق(∠ ب) = ٣٢° (١)

∴ ق (∠ جـ) = ١٨٠° – [١١٢° + ٣٢°] = ٣٦° (٢)

∴ $\frac{٧}{جا ١١٢°} = \frac{جـ/}{جا ٣٦}$ ∴ جـ/ = $\frac{٧ \times جا ٣٦}{جا ١١٢°}$ ∴ جـ/ = ٤,٤٤ سم (٣)

مثـ٢ـــال : حل Δ ﻫ ب ﺣ الذى فيه ﻫ/ = ٩ سم ، ب/ = ١٣ سم ، ق(∠ ﻫ) = ٩٨°

الحـــــــــل

∵ ∠ ﻫ منفرجة ، ﻫ/ < ب/ ∴ لا يوجد حل للمثلث

مثـ ٣ـــال : حل Δ ﻫ ب ﺣ الذى فيه ﻫ/ = ٢٠سم ، ب/ = ٢٨ سم ، ق(∠ ﻫ) = ٤٢°

الحـــــــــل

∵ ∠ ﻫ = ٤٢° (حادة) ، ع = ب × جا ﻫ = ٢٨ × جا٤٢ ≃ ١٨,٧

∵ ع < ﻫ/ < ب/ يوجد للمثلث حلان

∴ ﻫ/ ÷ جا ﻫ = ب/ ÷ جا ب = ﺣ/ ÷ جا ﺣ ∴ ٢٠ ÷ جا ٤٢° = ٢٨ ÷ ب

∴ جا ب = (٢٨ × جا ٤٢°) ÷ ٢٠ ∴ ق(ب) = ٧٠° أ، ق(∠ب) = ١١٠°

∴ ق (∠ﺣ) = ١٨٠° - [٤٢° + ٧٠°] = ٦٨° أ، ق (∠ﺣ) = ٢٨°

∴ ٢٠ ÷ جا ٤٢° = ﺣ/ ÷ جا ٦٨° ∴ ﺣ/ = (٢٠ × جا ٦٨°) ÷ جا ٤٢° ∴ ﺣ/ ≃ ٢٧,٧ سم

∴ ٢٠ ÷ جا ٤٢° = ﺣ/ ÷ جا ٢٨° ∴ ﺣ/ = (٢٠ × جا ٢٨°) ÷ جا ٤٢° ∴ ﺣ/ ≃ ١٤ سم

مثـ٤ـال : حل Δ ﻫب ﺣ الذى فيه ﻫ/ = ٤ ، ب/ = ٣ ، ق(∠ ﻫ) = ٥٠°

الحـــــــــل

∵ ∠ ﻫ = ٥٠° (حادة) ، ع = ب × جا ﻫ = ٣ × جا٥٠ ≃ ٢,٢٩

∵ ﻫ/ > ب/ يوجد حل للمثلث وحيد

وبتطبيق قانون الجيب ﻫ/ ÷ جا ﻫ = ب/ ÷ جا ب = ﺣ/ ÷ جا ﺣ ∴ ٤ ÷ جا ٥٠° = ٣ ÷ جا ب

∴ جا ب = (٣ × جا ٥٠°) ÷ ٤ ∴ق(∠ ب) = ٣٥° ٤/ (١)

∴ ق (∠ ﺣ) = ١٨٠° - [٥٠° + ٣٥° ٤/] = ٩٤° ٥٦/ (٢)

∴ ٤ ÷ جا ٥٠° = ﺣ/ ÷ جا ٩٤° ٥٦/ ∴ ﺣ/ = (٤ × جا ٩٤° ٥٦/) ÷ جا ٥٠° ∴ ﺣ/ = ٥,٢ سم (٣)

مثــ٥ــال : حل △ ٨ ب حـ الذى فيه ٨/ = ٥ سم ، ب/ = ٧ سم ، ق(∠ ٨) = ٦٠°

الحـــــــل

∵ ∠ ٨ = ٦٠° (حادة) ، ع = ب × جا ٨ = ٧ × جا ٦٠ ≃ ٦,١

∵ ٨/ < ع ∴ لايوجد حل للمثلث

مثــ٦ــال : حل △ ٨ب جـ الذى فيه ٨/ = ٤√٣ ، ب/ = ٦ ، ق(∠ ب) = ٦٠°

الحـــــــل

∵ ∠ب = ٦٠° (حادة) ، ع = ٨ × جا ب = ٤√٣ × جا ٦٠ = ٦ سم

∵ ع = ب/ يوجد حل للمثلث وحيد قائم الزاوية

وبتطبيق قانون الجيب $\frac{٨/}{جا ٨} = \frac{ب/}{جا ب} = \frac{جـ/}{جا جـ}$ ∴ $\frac{٦}{جا ٦٠°} = \frac{٤\sqrt{٣}}{جا ٨}$

∴ جا ٨ = $\frac{٤\sqrt{٣} \times جا ٦٠°}{٦}$ ∴ ق(∠ ٨) = ٩٠° (١)

∴ ق (∠ جـ) = ١٨٠° - [٦٠° + ٩٠°] = ٣٠° (٢)

∴ $\frac{٦}{جا ٦٠°} = \frac{جـ/}{جا ٣٠°}$ ∴ جـ/ = $\frac{٦ \times جا ٣٠°}{جا ٦٠°}$ ∴ جـ/ = ٣,٥ سم (٣)

تمـــــــارين

(١) حل △ ٨ب جـ الذى فيه ٨/ = ١٢ سم ، ب/ = ١٥ ، ق(∠ ٨) = ١٠٠°

(٢) حل △ ٨ب جـ الذى فيه ٨/ = ١٠ سم ، ب/ = ٩ ، ق(∠ ٨) = ٥٧°

(٣) حل △س ص ع الذى فيه س/ = ٢١ سم ، ص/ = ٢٦ ، ق(∠س) = ٥٢°

(٤) حل △ ٨ب جـ الذى فيه ٨/ = ٦ سم ، ب/ = ٨ ، ق(∠ ٨) = ٤٧°

(٥) حل △ ل م ن الذى فيه ل/ = ١٠ سم ، م/ = ١٨ ، ق(∠ ل) = ٣٥°